Departamento de Cómputo Científico y Estadística

Cálculo Numérico para Ingeniería - CO3211

Laboratorio # 1

Introducción a Matlab. Tipos de Errores.

Instrucciones Sobre los Laboratorios:

- Debe entregar el código fuente utilizado como un único archivo comprimido al casillero del aula virtual del profesor de laboratorio.
- No se reciben entregas extemporáneas sin su debida justificación.
- Estos trabajos son individuales salvo cuando el profesor de laboratorio indique lo contrario. Cualquier similitud extrema o falta de probidad demostrada en la realización de esta evaluación (código y resultados), será penalizada con la anuladación de la actividad y la sanción administrativa correspondiente.

Pre-Laboratorio

Usando la ayuda de Matlab (comando `help`) consulte sobre los siguientes temas:

- Librerias: `ops`, `lang`, `elmat`, `elfun` y `graph2d`
- Funciones del programador: `function` y `return`
- Ciclos: `while, for, break` y `continue`
- Condicionales: `if, else` y `elseif`
- Gráficos: `plot, title, legend, xlabel, ylabel, axes, axis, grid` y `hold`

Laboratorio

1. Sea $f(x) = (1 - \cos(x))/x^2$. Nótese que $0 \leq f(x) \leq 0.5$.

   (a) Grafique la función en el intervalo $[-3, 3]$.

   (b) Evalúe $f(x)$ en el punto $x = 1.2 \times 10^{-8}$ ¿Qué observa? ¿Es confiable este resultado? ¿Por qué? Justifique su respuesta.

   (c) Usando el hecho de que $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(x)$, la función puede ser escrita como

   $$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$$

   evalúe de nuevo en el punto $x = 1.2 \times 10^{-8}$ usando la nueva representación de $f(x)$ ¿Qué obtuvo? Analice el resultado y explique lo que sucede.

2. Escriba una función que aproxime el valor de $cos(x)$ usando el polinomio de Taylor de grado $2n$ centrado en 0, dado por

   $$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

   Los parámetros de entrada deben ser $x \in \Re$ y n un número natural. Impleméntela tal y como está escrita.

(a) Escriba otra función que aproxime el valor de $cos(x)$ usando la aproximación anterior pero evaluando el polinomio de forma recursiva:

$$y_{n+1} = (-1)^n$$

$$y_k = \frac{y_{k+1}x^2}{(2k)(2k-1)} + (-1)^{k-1}, \text{para } k = n, n-1, n-2, \ldots, 1$$

Muestre que y_1 es el polinomio dado en *a*.

(b) Grafique estas funciones en el intervalo $[8\pi, 14\pi]$ con $n = 51$, discretizado con paso 0.01. Ajuste los ejes para visualizar correctamente el gráfico de cada función. Documente el gráfico.

(c) Obtenga distintas aproximaciones numéricas de los valores $cos(2\pi)$, $cos(8\pi)$ y $cos(16\pi)$ para $n = 51$ con las funciones implementadas arriba. Calcule los errores relativos para cada aproximación.

(d) Explique, justificando con lo visto en teoría, a qué se deben estos resultados, cuál da mejor aproximación y por qué. Indique los distintos factores que influyen en la precisión de los resultados con estas dos forma de aproximar la función $cos(x)$. ¿Cómo se pueden mejorar estos resultados?

(e) Modifique las funciones de manera que para aproximar el valor de $cos(x)$ evalúe $cos(x - \left[\frac{x}{2\pi}\right] 2\pi)$ donde $[y]$ es la parte entera de y. Repita los incisos *c.* y *d.* Explique si mejoran o empeoran los resultados.¿A qué se debe? Concluya.

3. En estadística, la *varianza* de n datos: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ está definida como

$$V = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2, \quad \text{donde,} \quad \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{1}$$

Calcular la varianza usando esta fórmula requiere recorrer los datos dos veces, una para calcular la media aritmética $\overline{x}$ y otra para calcular la suma de los cuadrados de los datos. Esto puede ser indeseable cuando se tiene una gran cantidad de datos, es decir, cuando n es muy grande.

Una fórmula alternativa que usa aproximadamente la misma cantidad de operaciones que (1), pero que requiere pasar una sola vez por los datos, es la siguiente:

$$V = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right) \tag{2}$$

(a) Considere los los datos 10000000000, 10000000001, 10000000002. Calcule la varianza según la ecuación (1) y escriba el resultado.

(b) Calcule de nuevo la varianza, pero utilizando la ecuación (2). ¿Obtuvo el mismo resultado?. De no ser así, ¿a qué se debe la diferencia? ¿Cuál es la varianza exacta para estos datos? Justifique sus respuestas.